

Marek Pisarski

Jak wykorzystać metodę projektów w edukacji matematycznej?

- ✓ Dlaczego warto korzystać z metody projektów w edukacji matematycznej?
- ✓ Specyfika metody projektów w edukacji matematycznej
- ✓ Etapy realizacji metody projektów
- ✓ Przykłady tematów do realizacji metodą projektów oraz uwagi do ich realizacji



Analiza merytoryczna
Elżbieta Miterka

Recenzja
Jolanta Lazar

Redakcja językowa i korekta
Anna Wawryszuk

Projekt graficzny, projekt okładki
Wojciech Romerowicz, ORE

Skład i redakcja techniczna
Grzegorz Dębiński

Projekt motywu graficznego „Szkoły ćwiczeń”
Aneta Witecka

ISBN 978-83-65967-00-8 (Zestawy materiałów dla nauczycieli szkół ćwiczeń – matematyka)

ISBN 978-83-65967-19-0 (Zestaw 5. Metody poszukujące w edukacji matematycznej w klasach IV–VIII szkoły podstawowej i szkole ponadpodstawowej)

ISBN 978-83-65967-21-3 (Zeszyt 2. Jak wykorzystać metodę projektów w edukacji matematycznej?)

Warszawa 2017
Ośrodek Rozwoju Edukacji
Aleje Ujazdowskie 28
00-478 Warszawa
www.ore.edu.pl

Publikacja jest rozpowszechniana na zasadach wolnej licencji Creative Commons – Użycie niekomercyjne 3.0 Polska (CC-BY-NC).

Spis treści

Wstęp	4
Dlaczego warto korzystać z metody projektów w edukacji matematycznej?	5
Specyfika metody projektów w edukacji matematycznej	5
Etapy realizacji metody projektów	6
Dobór tematów	6
Opracowanie planu	7
Realizacja planu	8
Przygotowanie prezentacji efektów pracy	9
Ewaluacja	9
Przykłady tematów do realizacji metodą projektów oraz uwagi do ich realizacji	11
Tematy projektów typu WebQuest	11
Papyrus Rhinda	11
Matematyka w Babilonii	12
Wielcy matematycy i ich odkrycia	13
Liczby niewymierne i liczba π	14
Google	15
Nautilus Pompilius	16
Okrzyk „Eureka!”	17
Trysekcja kąta	17
Czy Matuzalem zginął w wodach potopu	19
Tematy projektów realizowanych poza szkołą	19



Urodzeni tego samego dnia roku	19
Mądrość tłumu	20
Obwód Ziemi	21
Odległość do horyzontu	22
Człowiek z rysunku Leonarda da Vinci	24
Małe badania społeczne	24
Tematy projektów dość luźno związanych z edukacją matematyczną	27
Superprojekt Muzeum Wyobraźni, czyli podążamy tropami eksponatów	27
Dowiedz się więcej	37
Bibliografia	38
Spis ilustracji	38



Wstęp

Ważną myślą przewodnią tego zestawu materiałów jest przekonanie o tym, że szkoła jest takim środowiskiem, taką przestrzenią edukacyjną, w której uczeń przygotowuje się do dojrzałego, pełnego, szczęśliwego życia. Życie to wymaga m.in. wyznaczania sobie celów, planowania, realizowania celów w określonym czasie, rozpisanych na etapy, a po wyczerpaniu przewidzianego czasu trzeba przywrócić się rezultatom i wyciągnąć wnioski. Procedury złożone z tych etapów, realizowane indywidualnie albo grupowo, nazywane są projektami. Słowo to weszło do powszechnego użytku, stało się nawet modne, a więc też jest już nieco nadużywane. Niemal każde przedsięwzięcie artystyczne, polityczne, gospodarcze czy bardziej skomplikowane działania w dowolnej dziedzinie nazywane jest projektem. Nie zawsze słusznie.

Ustalmy zatem, że przez metodę projektów będziemy rozumieli taką działalność uczniów i nauczyciela, dzięki której uczniowie wykonują, samodzielnie lub z niewielką pomocą pedagoga, następujące czynności:

1. Wybierają temat, problem do opracowania oraz cele działań, a także skład zespołu wykonawczego. Zespół ten powinien składać się z osób kompetentnych i chętnych do pracy. Nauczyciel nie będzie członkiem tego zespołu.
2. Przygotowują się do realizacji celów, zadań, czyli opracowują szczegółowy plan realizacji odpowiednio dobranych i ułożonych chronologicznie i logicznie zadań cząstkowych. Przydzielają te zadania osobom tworzącym zespół. Uzgadniają z nauczycielem termin realizacji wszystkich zadań oraz precyzują, jakie mają być efekty pracy zespołu.
3. Realizują przyjęty plan, zbierają i opracowują informacje oraz wykonują zaplanowane czynności, rozwiązując przy tym pojawiające się problemy. Podczas realizacji można modyfikować cele i zadania, dbając jednak o to, by jego efekty nie były gorsze od zamierzonych oraz żeby nie naruszać celów i nie zmieniać tematu projektu.
4. Przygotowują prezentację efektów projektu. Przedstawiają ją przed zaproszonym w tym celu audytorium. Następnie publiczność zadaje pytania dotyczące projektu, szczegółów jego realizacji oraz efektów, a także tego, czego nie dostrzeżono w prezentacji. Prezentację można przedstawić w formie audiowizualnej za pomocą odpowiedniej aplikacji, opracować ją w formie plakatów lub filmu. Zadawane pytania powinny stanowić podstawę do refleksji na temat tego, co zostało wykonane dobrze, a co nie zostało uwzględnione. Można także dokonać drobnych poprawek. Zatem to pierwszy krok do kolejnego etapu.
5. Dokonują ewaluacji – refleksji nad efektami pracy. Opisują, które zadania zostały wykonane do końca, a które nie. W wypadku niepowodzeń – określają ich przyczyny, opisują błędy. Wyciągają kolejne wnioski, w których nacisk położony jest na możliwe dalsze plany kontynuowania prac w ramach tego samego tematu albo nowych tematów



pokrewnych. Na tym etapie przywołujemy kryteria i standardy opracowane na początku pracy (etap 2).

Dlaczego warto korzystać z metody projektów w edukacji matematycznej?

Praca metodą projektu tym różni się od rozwiązywania chociażby zadania problemowego, że jej temat jest znacznie obszerniejszy, bardziej złożony, wymaga często wyjścia poza szkolną przestrzeń edukacyjną i szkolną wiedzę. W pracy nad projektem uczniowie korzystają też z wiedzy z wielu dziedzin, łączą zagadnienia z wielu przedmiotów szkolnych. Projekt wymaga często działań nastawionych bardziej na zdobywanie nowej wiedzy niż na korzystanie z już posiadanej. Chcemy zatem, żeby praca tą metodą wyzwalała u uczniów większą samodzielność i uważność. Zależy nam również, o czym wspominaliśmy na początku, żeby nawyki i podejście poznawcze zachowały się w umysłach uczniów jako trwałe schematy składające się na postawy szeroko rozumianej przedsiębiorczości i zaradności, współpracy i wrażliwości, a także przenosiły się na rzeczywiste problemy występujące w środowisku bliskim dzieciom i młodzieży. Warto więc zwracać uwagę na oba aspekty działań uczniów:

poznawczy – zdobywam nową wiedzę, rozwiązuję problemy matematyczne lub z innych przedmiotów;

praktyczny – umiem działać w środowisku społecznym, komunikować się z innymi, dostrzegać i rozwiązywać codzienne problemy.

Praca tą metodą angażuje grupę uczniów do współpracy. Realizacja wspólnych celów jest nadrzędna wobec wszelkich pokus związanych z rywalizacją czy wywoływaniem i utrwalaniem grupowych animozji.

Specyfika metody projektów w edukacji matematycznej

Cele edukacji matematycznej jasno określają specyfikę realizacji metody projektów. Najłatwiej zapoznać się z nią, przyglądając się tematowi, które przedstawimy w tym zeszycie. Teraz warto jedynie nadmienić, że zależy nam na tym, by uczniowie odkrywali i praktykowali matematykę w dwóch aspektach:

- jako samodzielną dziedzinę, użyteczną w codziennym życiu podczas rozwiązywania problemów praktycznych,
- jako narzędzie i język użyteczny podczas poznawania świata i konstruowania teorii na jego temat.

Wprowadzając metodę projektów, w której duże znaczenie ma samodzielna praca uczniów, ich osobisty wkład, nauczyciel chce poszerzyć granice swobody, w szkolnej przestrzeni



edukacyjnej często wyznaczone dość wąsko. Okazuje w ten sposób duży szacunek dla swoich podopiecznych i ich zainteresowań, wzmacnia je, nadaje im wyższą rangę, gdy stwarza okazje do dzielenia się nimi na forum klasy, szkoły czy jeszcze szerszym.

Wielu uczniów spotkało się z metodą projektów wcześniej; nie sposób, żeby tak nie było. Najprawdopodobniej wielu nie wiedziało, że ją stosuje. Planowanie i realizowanie interakcji z innymi ludźmi w sytuacjach, w których chcieli oni osiągnąć założony cel – to właśnie działanie metodą projektu. Dziecko, które chce otrzymać nową zabawkę, zazwyczaj poprosi o nią kogoś dorosłego. Jeżeli spotka się z odmową, może opracować nowy plan albo zrezygnować z zabawki. Może wpadnie na pomysł oszczędzania lub wykonywania drobnych prac dla najbliższych, z których dochód zasili „konto oszczędnościowe”, a może włączy do współpracy znajomych, z którymi poszuka innych możliwości w ramach niespisanym umów. Dzieci mogą też wspólnie określić inny cel lub bardziej skuteczną metodę nacisku. Możliwości jest wiele. Każda z wybranych dróg może dostarczyć nowych danych o świecie i kształcić nowe umiejętności funkcjonowania w nim. Te właśnie, naturalne, intuicyjne strategie postępowania chcemy wykorzystać w pracy z uczniami. Ich stosowanie nie tylko poprawi skuteczność naszego nauczania w zakresie celów edukacji matematycznej, ale też rozwinie w uczniach ich naturalne skłonności, nauczy odgrywania nowych ról i stosowania nowych strategii postępowania, zwłaszcza w sytuacjach, gdy cel nie jest łatwy do osiągnięcia i odroczony w czasie.

Istotą metody projektów jest właśnie wydłużony czas dochodzenia do celu. Realizując założony plan, nie wolno przekraczać czasowych ograniczeń, czyli odkładać realizacji zadań na ostatnią chwilę. To bardzo ważna zasada. Trzymając się terminów, uczniowie uczą się systematyczności, rzetelności oraz walczą z częstą chorobą nowoczesnych społeczeństw, korzystających z wielu pomysłów na spędzanie czasu, znacznie przyjemniejszych niż zdobywanie szkolnej wiedzy – prokrastynacją.

Etapy realizacji metody projektów

Dobór tematów

Odpowiednio dobrany temat to taki, z którym uczniowie będą się w stanie utożsamić, na którym chętnie skupią swoje działania, który ich pochłonie. Dlatego przy doborze warto, a nawet trzeba, zacząć od rozmowy z uczniami, aby dowiedzieć się z niej, czym się interesują, co ich zajmuje, z jakich źródeł korzystają, gdy chcą się czegoś dowiedzieć. Co ich inspiruje i na czym się polaryzują poza szkołą.

Rozmawiając o inspiracjach, warto włączyć do rozmowy ulubione komunikatory. Jeżeli nawet nie dopatrzemy się żadnych matematycznych odniesień w ulubionych filmikach oglądanych na YouTube, postach, internetowych forach czy na innych stronach wyszukiwanych za pośrednictwem Google'a, to same te portale i serwery mają już liczne związki z matematyką oraz inspirują do obmyślania tematów prac projektowych.



Kiedy dowiemy się tego wszystkiego, czeka nas niezbyt łatwe zadanie dopasowania celów edukacji matematycznej do uczniowskich zainteresowań i preferencji. Zadanie staje się jeszcze trudniejsze, gdy uczniowie nie przejawiają zainteresowań poznawczych, wydają się bierni lub skoncentrowani wyłącznie na własnych potrzebach, niechętni do podejmowania zaplanowanych długoterminowych prac w zespole.

Liczymy na to, że zdrowe interakcje grupowe, jakie zawiążemy, same w sobie będą silnie motywujące do współpracy, jednak nie zawsze tak się dzieje. W dalszej części omówimy przykładowe tematy projektów. Niektóre z nich były już wcześniej realizowane z sukcesem. Ich rozpiętość jest duża. Jeżeli uczniowie nie będą w stanie uzgodnić wspólnego tematu dla grupy, zawsze mogą wybrać z naszych propozycji coś, co zainteresuje ich choćby w małym stopniu.

Opracowanie planu

Kiedy temat jest już wybrany, precyzujemy kolejne oczekiwania. Chcemy, aby uczniowie opracowali plan konkretnych działań rozłożonych w czasie z dokładnie sprecyzowanymi terminami realizacji. Zapewne trzeba im będzie pomóc. Także w zakresie terminów będą potrzebowali naszej rady. Termin zakończenia projektu nie może być zbyt odległy. Wiele zależy od zakresu prac, ich czasochłonności i pracochłonności. Pierwsze projekty uczniów nie powinny wymagać za dużo pracy, a zatem także czasu. Rozsądny horyzont czasowy na początek to od trzech do czterech tygodni. Młodsze dzieci powinny mieć krótsze terminy. Przy kolejnych projektach można wydłużać ich czas realizacji. Zbyt długi czas pracy nad projektem sprzyja nawykowi prokrastynacyjnemu.

Aby pomóc uczniom, możemy przygotować tabelę, w którą wpiszą swoje plany. Nie powinna być ona zbyt złożona, natomiast zawierać niezbędne informacje, z których wynikać będzie, w jakim zakresie projekt ma być zrealizowany na poszczególnych etapach. Można ją jednak uzupełnić o dodatkowe rubryki dotyczące narzędzi i efektów pracy. Tabela przede wszystkim przypomina, co ma być zrobione, przez kogo i w jakim czasie.

Temat:			
Skład zespołu:			
(szef projektu)			
Nr zadania	Zadanie	Kto jest odpowiedzialny	Termin realizacji zadania
1			
2			



Temat:			
3			
4			
5			
6			
Termin realizacji całego projektu:			

Realizacja planu

Na tym etapie nauczyciel staje się coachem w pełnym tego słowa znaczeniu (szerzej por. Zeszyt 1). Jego zadaniem jest dyskretnie towarzyszyć, wspierać, doradzać. Można do niego przyjść z problemami i uzyskać niezbędne wskazówki. Jego zadaniem będzie przypominanie o terminach realizacji zadań.

Warto doradzić uczniom, gdzie i kiedy mogą się spotykać na terenie szkoły po lekcjach, gdzie i jak mogą szukać informacji i w jakiej formie je przetwarzać i prezentować.

Na końcowych etapach projektu coach sugeruje, w jakiej formie złożyć raport z prowadzonych prac i jak przygotować prezentację. Jego rola jako osoby motywującej i ułatwiającej usuwanie przeszkód na drodze realizacji projektu jest bardzo istotna. Warto dobrze rozpoznać swoją rolę, zanim przystąpimy do oceny pracy uczniów.

W przygotowaniu prezentacji bardzo pomaga sporządzony przez uczniów raport, zawierający wszystkie materialne rezultaty ich działalności. Karty pracy, ankiety, opracowania w formie notatek, zdjęcia, dokumenty, nagrania – powinny trafić do odpowiednio podpisanej teczki lub albumu dostępnych dla każdego, kto chciałby zapoznać się z dokumentacją projektu. Powinny znaleźć się tam wyłącznie rzeczy najważniejsze, ale istotne jest także, żeby materiały te miały znaczącą objętość, która, co prawda metaforycznie, ale jednak, będzie podkreślać znaczenie (wagę) podejmowanych czynności.

Przygotowanie prezentacji efektów pracy

Uczniowie przedstawiają wyniki swojej pracy. Mają na to wyznaczony czas i miejsce. Sami decydują, czy do prezentacji wystawiają jedną osobę (nie musi to być szef projektu), czy każdy z członków zespołu będzie coś mówić, robić lub pokazywać. Warto przed prezentacją przedstawić uczniom wielość jej wariantów. Prezentacja może być interaktywna, angażować widownię lub tradycyjna, „pytania na zakończenie”, można odpowiednio zaaranżować wnętrze, przygotować ekspozycję, wzbogacić ją o ciekawe nagrania.



Ewaluacja

Warto podkreślić, że etap ten jest tak samo ważny jak każdy poprzedni, chociaż może się wydawać uczniom, że skoro już przeprowadzili to, co zamierzali, napisali raport i zaprezentowali wyniki, praca jest skończona. Nic podobnego. Musi być ewaluacja. Uczniowie też powinni zdawać sobie sprawę, że ewaluacja nie jest równoważnym pojęciem do oceniania. Nie chodzi w niej o wskazanie błędów ani nanoszenie szybkich poprawek i zmian, to tylko i aż przyglądanie się efektom, możliwie wszechstronne oglądanie wyników wielotygodniowej pracy uczniów.

W wąskim gronie zainteresowanych (zespół i ich coach) wszyscy pochylają się nad projektem, patrzą wstecz na minione tygodnie pracy, zastanawiają się nad tym, co można było zrobić inaczej, co lepiej lub czego się przy tym nauczyli, a czego nie. Po kilkunastominutowej, dość luźnej rozmowie coach może zaproponować ankietę, w której zostaną jeszcze raz zebrane treści rozmowy lub istotne informacje w niej pominięte. Ankieta ta trafi do teczki (albumu) z całą dokumentacją. Wnioski zaś będą wykorzystane podczas kolejnych prac metodą projektów i wpłyną pozytywnie na ich efekty.



Przykładowa ankieta ewaluacyjna po przeprowadzonym projekcie:

Temat projektu:	
Czas realizacji (od–do):	Imię i nazwisko członka zespołu:
<p>1. W której z twoich ról w projekcie czułaś/czuteś się najlepiej? Zaznacz odpowiedź.</p> <ul style="list-style-type: none"> • <input type="checkbox"/> szefa • <input type="checkbox"/> sekretarza • <input type="checkbox"/> zbieracza informacji • <input type="checkbox"/> mediatora • <input type="checkbox"/> rozwiązującego problemy • <input type="checkbox"/> prezentera • <input type="checkbox"/> innej (jakiej?) 	
<p>2. Na ile procent oceniasz wkład własny w pracę w projekcie i jego wyniki? Zaznacz odpowiedź.</p> <ul style="list-style-type: none"> • <input type="checkbox"/> 0%–10% • <input type="checkbox"/> 11%–30% • <input type="checkbox"/> 31%–50% • <input type="checkbox"/> 51%–75% • <input type="checkbox"/> 76%–100% 	
<p>3. Ile razy zespół spotykał się w całym składzie, żeby podjąć ważne decyzje dotyczące pracy lub zrobić coś razem? Zaznacz odpowiedź.</p> <ul style="list-style-type: none"> • <input type="checkbox"/> ani razu • <input type="checkbox"/> co najmniej raz, ale mniej niż 5 • <input type="checkbox"/> 5–10 razy • <input type="checkbox"/> więcej niż 10 razy 	
<p>4. Jakie umiejętności zdobyłeś lub wykorzystywałeś podczas pracy nad projektem? Wpisz odpowiedź.</p>	
<p>5. Czego nauczyłeś się podczas realizacji projektu? Zwróć uwagę na umiejętności matematyczne. Wpisz odpowiedź.</p>	
<p>6. Kto, oprócz twego nauczyciela i członków zespołu, pomagał ci w realizacji zadań projektowych? Wpisz odpowiedź.</p>	

Przykłady tematów do realizacji metodą projektów oraz uwagi do ich realizacji

Tematy projektów typu WebQuest¹

Dzięki szerokiemu internetowemu dostępowi do informacji z różnych dziedzin można prowadzić badania projektowe bez wychodzenia z pomieszczenia. Czasem jest to zaleta, a czasem nie. Surfowanie po sieci w poszukiwaniu informacji, opracowywanie ich, często też umieszczanie swoich wyników na serwerach do tego przeznaczonych – to już pewien rodzaj mody, styl życia, sposób na rozwiązywanie codziennych problemów, na zaistnienie. Praca z komputerem umożliwia dostęp do oprogramowania, w którym można dane gromadzić i przetwarzać, a także opracowywać atrakcyjne prezentacje, podnoszące walory pracy. Oprócz stosowanego powszechnie pakietu programów Office w różnych wersjach na uwagę zasługuje wirtualna „korkowa tablica”, czyli Padlet. Prostą instrukcję obsługi łatwo można znaleźć na YouTube. Padlet świetnie nadaje się do gromadzenia i prezentacji efektów projektu realizowanego metodą WebQuest. Przygotowanie dokumentacji odbywa się sprawnie i elegancko.

Dobrym początkiem, punktem wyjścia poprzedzającym wybór tematu, jest obejrzenie krótkich filmów, z których może narodzić się projekt. Wystarczy wpisać w wyszukiwarce tytuł kolejnego podrzdziału... i zaczyna się podróż pełna tajemnic do odkrycia, otwierają się rozległe pola dla naszej dociekliwości. Każdy powinien tam znaleźć coś, czym warto się zająć przez kolejne tygodnie.

Papirus Rhinda



Papirus matematyczny Rhinda

¹ Główne cele WebQuestu pokrywają się z metodą projektu. Chodzi w niej o poszukiwanie informacji w różnych źródłach za pośrednictwem internetu. Uczniowie selekcionują je pod względem użyteczności, opracowują i stosują do rozwiązywania problemów. Jest to metoda aktywizująca i można ją stosować w uczeniu się dowolnych zagadnień na każdym etapie edukacyjnym.

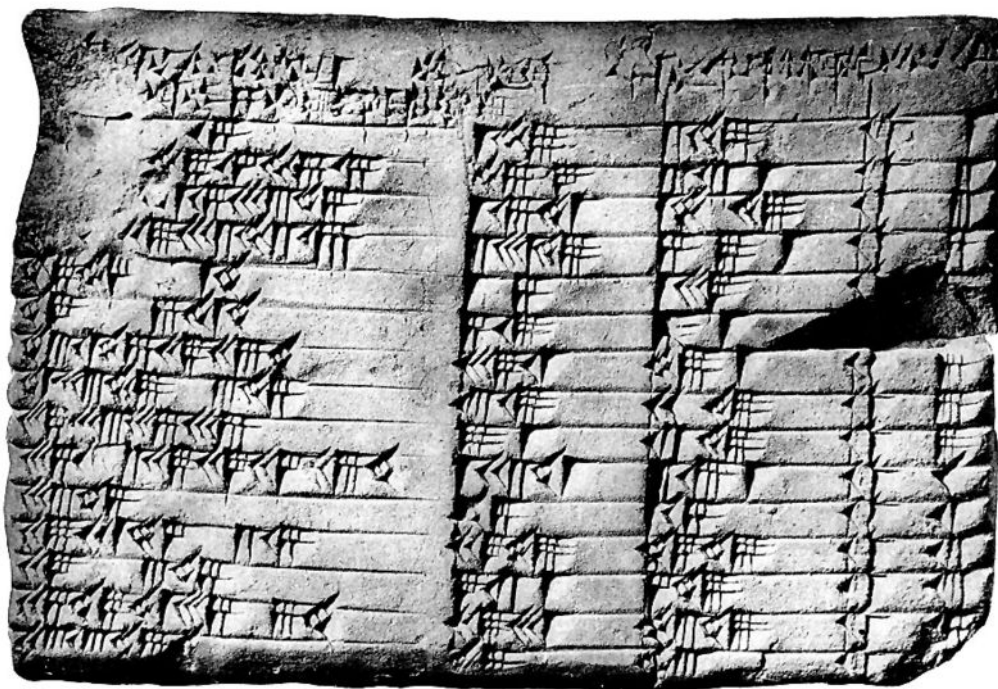


W zależności od tego, na jaki film trafi uczeń, może się on z niego dowiedzieć czegoś na temat matematyki uprawianej w starożytnym Egipcie ok. 4,5 tysiąca lat temu. Zagadnienie to może szczególnie zainteresować humanistów.

Przykładowe tropy, którymi warto pójść, można zawrzeć w następujących pytaniach:

1. Jak Egipcjanie zapisywali swoje odkrycia?
2. Jakimi zagadnieniami zajmowali się ówcześni astronomowie i geometryści?
3. Kim był Rhind, a kim Achmes?
4. Jakie informacje odczytano ze starożytnych papirusów?
5. Jak produkowano starożytny „papier”?
6. Czego uczono w szkołach egipskich i czego nie uczy się już w obecnych?
7. Jak Egipcjanie wykonywali obliczenia?
8. Jak radzili sobie z zapisywaniem cyfr, a jak ze sprawiedliwym podziałem bochenków chleba?
9. Jak Egipcjanie mnożyli liczby?

Matematyka w Babilonii



Tabliczka Plimpton 322

Temat jest trochę podobny do poprzedniego. Zestawiamy je obok siebie ze względu na istotne różnice. Można się nimi zająć w ramach kolejnego projektu.

Mamy tu sporo tropów. Uczniom klasy VIII warto zaproponować ciekawą analizę tabliczki o nazwie Plimpton 322. Niedawno rozszyfrowano z niej ciekawe związki między trójkami



pitagorejskimi. Interesujący jest także babiloński system zapisywania liczb. Babilończycy nie znali zera, więc czasem zapisy liczb w systemie pozycyjnym o podstawie 60 mogły być mylące.

Trop „zero w matematyce” warto wskazać uczniom jako ważny i bardzo bogaty temat kolejnego projektu. Gdzie i w jakich tekstach znajdujemy najstarsze zera? Dlaczego zero pojawiło się tak późno w porównaniu z pozostałymi cyframi?

Wielcy matematycy i ich odkrycia



Leonard Euler (1707–1783)

Mamy tu duże pole do popisu przy wyborze. Można zasugerować, by uczniowie skorzystali z materiałów na temat uczonego, o odkryciach którego uczymy się dziś w szkole. Tales, Pitagoras, Euklides, Kartezjusz, Euler i wielu innych matematyków oraz uczonych przyczyniło się do rozwoju wiedzy, nie tylko matematycznej. Ten ostatni jest szczególnie ważnym dla nas matematykiem, ponieważ niektóre jego odkrycia są łatwe do zrozumienia przez uczniów: liczby ujemne, figury jednobieżne i kilka innych.

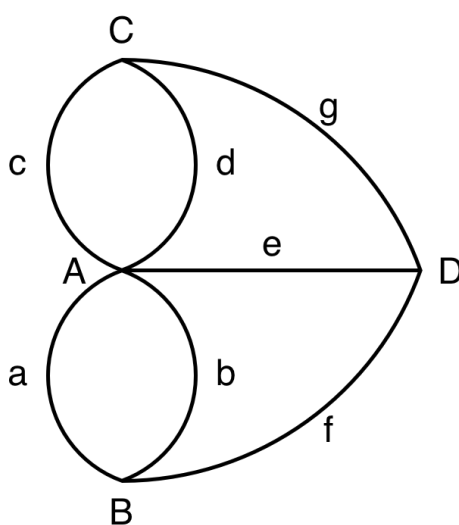


Rys. 1. Słynne zagadnienie mostów w Królewcu – jak przejść po każdym tylko raz i skorzystać ze wszystkich dróg, które je łączą, nie powtarzając żadnej



Jeśli w tematach postać autora problemu jest silnie eksponowana, może pojawić się ryzyko, że uczniowie wejdą w wątki biograficzne. Trzeba ich uprzedzić, że zależy nam na problemach, którymi zajmowali się wybitni uczeni i ich rozwiązaniach. Anegdoty o nich są ważne jako ozdoby prezentacji.

W wypadku Eulera wątek figur jednobieżnych może się wydać interesujący młodszym uczniom. Mogą opracowywać własne figury, które da się narysować, nie odrywając ołówka od kartki. Starsi chętnie dowiedzą się, jak rozpoznać, która figura jest, a która nie jest jednobieżna.



Co ma wspólnego przedstawiony na rycinie graf z mostami w Królewcu?

Liczby niewymierne i liczba π

Nie wszyscy uczniowie wiedzą, że liczb niewymiernych jest znacznie więcej niż wymiernych, którymi zajmują się na co dzień. Potrafią oni wymieniść niewiele liczb niewymiernych, często może nie dostrzegają lub nie rozumieją różnicy między nimi a liczbami wymiernymi. Projekt poświęcony liczbom niewymiernym: czym są, jak doszło do ich odkrycia, dlaczego długo nie były akceptowane itp., będzie z pewnością bardzo interesujący. Prezentację mogą wzbogacić fragmenty jednego z licznych filmów o liczbach niewymiernych, dostępnych w sieci.

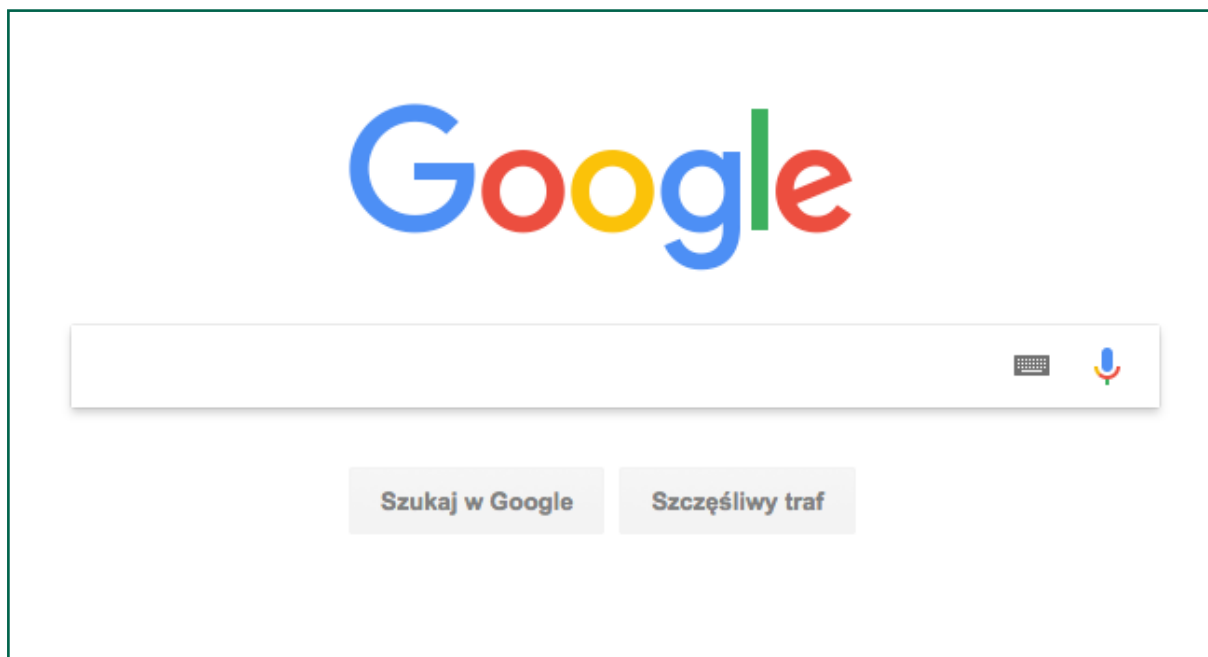
Innym projektem będącym osobnym przedsięwzięciem, które może wyniknąć z poprzedniego, jest organizacja **Szkolnego Dnia Liczby π** (albo jakiegokolwiek innej ważnej liczby niewymiernej, np. e).

Zadaniem projektu mogłoby być zebranie najciekawszych wierszy ułatwiających zapamiętanie kilkunastu cyfr rozwinięcia liczby niewymiernej lub konkurs, kto zna ich najwięcej. Dostępne są bardzo długie ciągi cyfr rozwinięcia liczb niewymiernych. Intrygującym zadaniem jest wyszukiwanie w nich pełnych dat urodzin.



Święto liczby π wypadające 14 marca uświetniają specjalnie wypieczone na ten dzień okrągłe ciasteczka z literą, która oznacza stały stosunek obwodu koła do jego średnicy.

Google



Wyszukiwarki internetowe gromadzą, a wielkie firmy je obsługujące opracowują ogromne zbiory danych. Warto poszukać informacji o najśłynniejszej z nich, firmie Google. Skąd pochodzi jej nazwa? Na czym polega jej działalność i jakie są jej dochody? W jaki sposób dane są zbierane i przetwarzane? Gdzie są gromadzone i jak wielkie są te zasoby? Jak wygląda praca w Google'u?

Wiadomo, że opracowując dane o wpisywanych hasłach, można przewidzieć m.in., na jakich terenach rozwinie się epidemia grypy. Na podstawie liczby negatywnych wpisów w wyszukiwarce można wyciągać wnioski na temat cen akcji na giełdach. Niektóre dane wyszukiwania Google'a są powszechnie dostępne, inne ściśle tajne. Wyszukiwanie i opracowanie tych dostępnych danych to temat na ciekawy szkolny projekt.

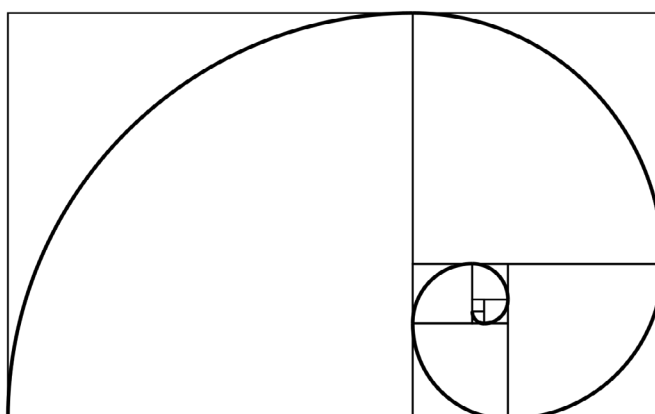
Uczniowie wyszukują najpopularniejsze wpisy w Google'u w różnych kategoriach. Porównują je ze znanymi zjawiskami. O czym może świadczyć tak duża liczba wpisów w wyszukiwarkach? Czy na ich podstawie można przewidzieć jakieś szczególne wydarzenia w Polsce i na świecie?

Warto zajrzeć na stronę <https://trends.google.com/trends/yis/2016/GLOBAL> oraz www.google.com/trends/. Można tam sprawdzić, jakie są najpopularniejsze hasła lub pytania wpisywane przez ludzi na całym świecie. Jest więcej stron, dzięki którym można zdobyć również ciekawe informacje, np. Visualizing Google Data.



Analiza oglądalności filmów zamieszczanych przez użytkowników YouTube'a, analiza trendów popularności osób i filmów, rekordów oglądalności także może przynieść ciekawe wyniki, a tym samym prowadzić do tworzenia interesujących i pouczających projektów.

Nautilus Pompilius



Nautilus Pompilius i spirala Fibonacciego

Niektórzy uważają, że spiralna muszla tego głowonoga jest tak zwaną złotą spiralą, bo jej kształt odpowiada złotym proporcjom. Inni badacze są jednak odmiennego zdania. Rozbudzając zainteresowanie tym pięknym zwierzęciem, można jednocześnie sprawdzić, kto ma rację.

Warto też obejrzeć piękny i inspirujący krótki film pod tytułem [Nature by Numbers](#), dostępny w internecie. Film pokazuje m.in. związki ciągu Fibonacciego (1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ...) z kwiatostanem słonecznika. Pokazując piękno natury przez jej komputerową animację, film skłania do refleksji nad znaczeniem elektronicznych środków wizualizacji i symulacji zjawisk świata.

Należy zachęcić uczniów, by część z nich poszła ciekawym tropem ciągu Fibonacciego, historii tego uczonego i jego odkryć. Złoty podział odcinka i złota spirala to w dalszym ciągu tematy pokrewne.



Okrzyk „Eureka!”

Nie opuszczajmy jeszcze starożytności. Znany jest problem rozwiązany przez Archimedesesa, jak głosi legenda, podczas kąpieli. Zastanawiał się nad zadaniem polegającym na sprawdzeniu, czy podczas tworzenia korony dla króla Syrakuz nie doszło do oszustwa. Król miał pewne wątpliwości. Podejrzał, że wykonujący koronę złotnik zastąpił część cennego kruszcu innym, tańszym metalem. Archimedes był w kropce do momentu, gdy wpadł na pomysł ściśle związany z sytuacją, w której się znalazł, leżąc w wannie. Historia o tym wielkim uczonym stanowi pretekst do szerokich poszukiwań. Uczniowie dowiedzą się więcej o tym, czego dokonał w matematyce i w sztuce wojennej, jak zginął i w jakich sytuacjach nadal korzystamy z wyników jego prac. A także, jak się zakończyła historia ze złotnikiem i co dokładnie oznacza okrzyk, którym także uczniowie mogą świętować wyjście z impasu, z kropki.

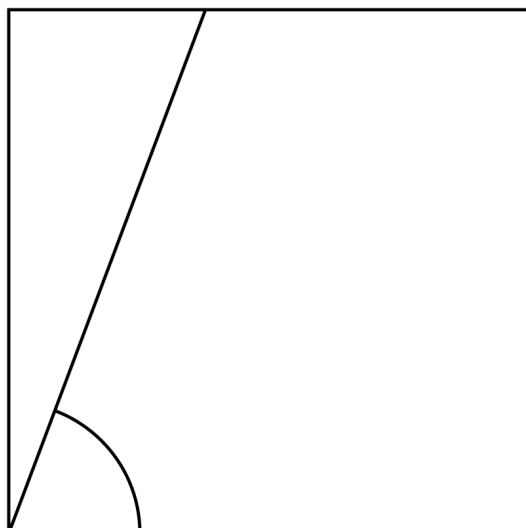
Trysekcja kąta

Zagadnienie podziału dowolnego kąta na trzy kąty przystające stanowi jedno z kilku ważnych, długo nierozwiązanych problemów starożytnych matematyków. Przez wiele stuleci poszukiwano konstrukcji podziału kąta na trzy równe z pomocą cyrkla i linijki, aż w końcu udowodniono, że konstrukcji takiej nie da się przeprowadzić. Po drodze do rozwiązania tego nierozwiązywalnego problemu narodziło się wiele konstrukcji przybliżonych oraz dokładnych, ale niewykorzystujących cyrkla i linijki. Uczniowski projekt badawczy może dotyczyć zagadnień historycznych i matematycznych. Uczniowie opiszą w nim różne ciekawe ich zdaniem konstrukcje oraz szkic uzasadnienia, że dokładna klasyczna konstrukcja nie istnieje.

Warto też postawić przed uczniami następujące zagadnienie:

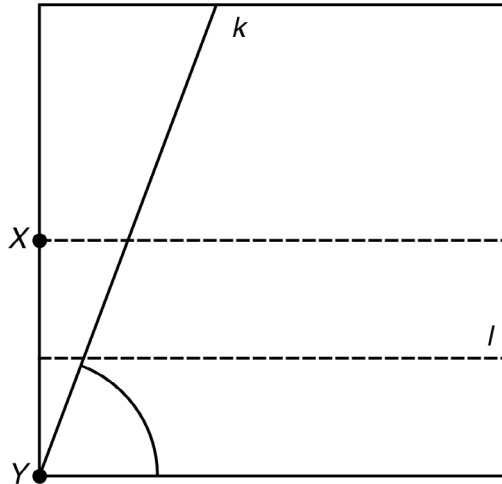
Oto trysekcja kąta wykonana techniką origami. Czy jest ona przybliżona, czy dokładna?

1. Na kwadratowej kartce, zginając ją, zaznaczamy dowolny kąt.

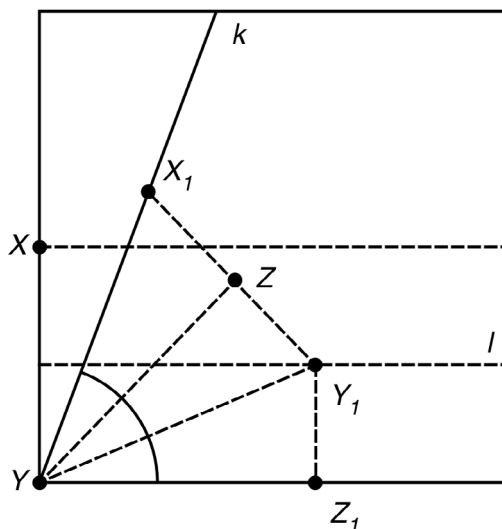




2. Kwadrat zginamy w połowie i w jednej czwartej jego wysokości (linie przerywane).
Zaznaczamy punkty X, Y.



3. Zginamy kartkę tak, aby punkt X znalazł się na prostej k, a punkt Y na prostej l.
Zaznaczamy punkt Z (leżący tam, gdzie lewy koniec odcinka prostej l), który wyznaczy
szukaną trysekcję.
Kąty X_1YZ , ZYY_1 , Y_1YZ_1 są równej miary.



Dowód poprawności tej konstrukcji jest cennym zadaniem dla twórców projektu. Nie jest to zadanie bardzo trudne. Wystarczy przypomnieć sobie cechy przystawania trójkątów.



Czy Matuzalem zginął w wodach potopu

W Biblii znajdziemy wiele informacji dotyczących związków między liczbami i figurami geometrycznymi. Natrafimy tam także na wiele opisów, które można badać metodami typowymi dla matematyki.

Na przykład w rozdziale 5 Księgi Rodzaju zapisana jest ciekawa genealogia wszystkich patriarchów od Adama do Matuzalema i Noego. Można potraktować zawarte w niej liczby jak dane matematycznej łamigłówki i uporządkować je w ciąg lat życia wymienionych osób, korzystając z osi czasu. Ta praca doprowadzi uczniów do ciekawych wniosków.

Odpowiedz sobie na pytania w rodzaju:

- Czy Adam dożył setnych urodzin swego potomka Noego?
- Ilu swoich prawnuków mógł oglądać Adam?
- Czy Noe mógł wziąć swego ojca Lameka do Arki (Rdz 7, 7).
- Czy Matuzalem zginął w wodach potopu?

Warto też poszukać odpowiedzi na pytania o tak duże liczby lat życia poszczególnych patriarchów. Ile razy należałoby je skrócić, by były to liczby zbliżone do obecnych średnich długości życia ludzkiego?

Tematy projektów realizowanych poza szkołą

Projekty wymagające wyjścia poza pomieszczenie i podejmowania działań w najbliższym otoczeniu są bardzo kształtujące. Wszyscy dostrzegają korzyści związane z zaangażowaniem, poznawaniem ludzi, radzeniem sobie w sytuacjach, gdy trzeba się wykazać umiejętnościami komunikacyjnymi. Środowisko domu i szkoły jest oswojone. Konieczność wejścia w inne przestrzenie, muzea, biblioteki, urzędy, sklepy, biura itp. to wymarzone sytuacje, w których szukamy równowagi między wymaganiami, które stawia uczniom szkoła, i wymaganiami życia poza nią. Niezwykle ważne jest, żeby oba światy spotykały się jak najczęściej, łączyły i przenikały. Uczeń powinien być coraz bardziej świadomy, że umiejętność poruszania się w świecie wirtualnym to za mało, żeby zdobyć naprawdę użyteczną wiedzę.

Urodzeni tego samego dnia roku

Ten pomysł wymaga przeprowadzenia prostych badań za pomocą ankiety zawierającej jedno pytanie. Brzmi ono: „Którego dnia się pani urodziła/pan urodził? Proszę podać datę bez roku”.

Pytanie to można też skierować do młodzieży szkolnej. Celem badania jest sprawdzenie, jak liczna musi być badana grupa, żeby wśród odpowiedzi powtórzyły się dwie daty, trzy daty lub cztery.

Intuicja podpowiada nam, że aby w grupie znalazły się co najmniej dwie osoby urodzone tego samego dnia roku, pytanie to trzeba zadać bardzo dużej liczbie osób, może nawet



przekraczającej 300. Tymczasem okazuje się, że wystarczy znacznie mniej niż 300. Szperając w internecie, uczniowie mogą trafić na wzór, z którego wynika ta prawidłowość.

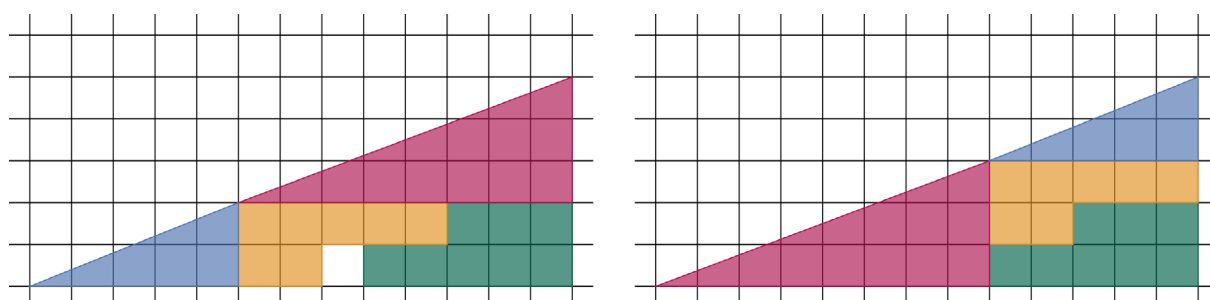
$$p(n) = 1 - \frac{365!}{(365 - n)! \cdot 365^n}$$

$p(n)$ – to prawdopodobieństwo, że wśród n osób co najmniej dwie urodziły się pod tą samą datą. Łatwo sprawdzić, że dla $n=25$ jest ono dość wysokie.

Można poszukać wzoru dla sytuacji z większą liczbą urodzonych tego samego dnia roku, ale trzeba zrozumieć, jak działa wzór dla co najmniej dwóch osób.

Warto też sprawdzić, czy w klasie są co najmniej dwie osoby urodzone w tym samym dniu roku.

Trop intuicji, która podsuwa nam błędne wnioski, jest bardzo interesujący. Można wyszukać ciekawe sytuacje, w których ludzie popełniają błędy.



Rys.2. Jak to możliwe, że z tych samych kawałków układanki można ułożyć trójkąty o różnych polach?

Mądrość tłumu

Pod tą nazwą kryje się pewna statystyczna prawidłowość, ilustrowana następującym przykładowym eksperymentem. Do dużego słoja wrzuca się jednakowe pastylki, a następnie pyta jak największą grupę osób o liczbę cukierków w słoju. Każdy podaje swoją liczbę bez dłuższego zastanowienia. Warto zapytać o to nawet 200 osób lub więcej.

Pytanie trzeba zadawać każdej osobie oddzielnie, żadna z odpowiadających nie zna wcześniejszych odpowiedzi. Okazuje się, że średnia obliczona na podstawie zebranych odpowiedzi, które będą z oczywistych powodów błędne, okaże się bardzo bliska rzeczywistej liczbie pastylek w słoju.

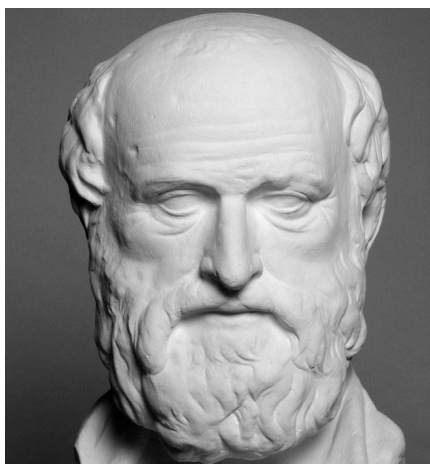
Ta prawidłowość może zastanawiać, więc warto ją sprawdzić na jak największej grupie. Zapisane liczby trzeba dodać i podzielić przez liczbę składników. Dopiero wtedy warto przeliczyć pastylki. Znając ich liczbę wcześniej, nie możemy być pewni, czy w jakiś sposób nie dostała się do przestrzeni publicznej i to nie wpłynie na wynik badań.



Uczniowie mogą wymyślić inne pytania odwołujące się do „mądrości tłumu”. Czy zawsze średnia intuicyjnych szacowań okazuje się bliska prawdziwemu wynikowi?

Pytania mogą dotyczyć masy prezentowanych przedmiotów (także naszego słoja z pastylkami, ale nie wolno brać słoja do ręki), dat historycznych wydarzeń, wysokości widocznych budynków, temperatury powietrza, odległości pomiędzy znanymi miastami itp.

Obwód Ziemi



Eratosthenes z Cyreny (276–194 p.n.e.)

Kwestia pomiaru obwodu Ziemi to jedno z klasycznych zagadnień matematyki i geografii. Wiązane jest z greckim uczonym Eratostenesem, który umiał wykorzystać kąty padania promieni słonecznych w dwóch odległych miastach egipskich w ustalonym dniu roku. Znana mu była też odległość między tymi miastami (Aleksandrią i Syene).

Wszystkiego na temat tego genialnego w swojej prostocie starożytnego projektu można się dowiedzieć z Wikipedii. Zrozumienie procedury nie wymaga wyjścia z budynku, ale powtórzenie pomiarów i obliczeń Eratostenesa już tak.

Trzeba nawiązać kontakt z kimś mieszkającym dość daleko od nas i w dodatku na tym samym co my południku, aby w odpowiednich warunkach pogodowych, w tym samym momencie co my zmierzył kąt padania promieni słonecznych. Na tej podstawie można obliczyć różnicę szerokości geograficznych pomiędzy miejscami pomiarów. Otrzymany kąt należy podstawić do odpowiedniej proporcji, w której ważne miejsce zajmuje długość południka pomiędzy punktami pomiaru.

Wynik otrzymany na podstawie bezpośrednich pomiarów można porównać z bardziej dokładnym, uzyskanym na podstawie rzeczywistych współrzędnych geograficznych obu miejsc, które łatwo odczytać z urządzeń korzystających z GPS.

Swoje wyniki oraz techniki pomiarowe uczniowie porównają z technikami i wynikami Eratostenesa, który nie mógł korzystać z telefonu komórkowego ani z zegara, ani



z precyzyjnych metod pomiarów odległości. Wiedział jednak już w III wieku p.n.e., że Ziemia ma kształt zbliżony do kuli, co wielu późniejszych uczonych kwestionowało.

Odległość do horyzontu

Ten projekt może zaczynać się od romantycznej historyjki.

„W pogodny wiosenny poranek Małgosia i Kuba wybrali się na spacer na plażę.

– Spójrz, Małgosiu, jak pięknie dziś widać horyzont! Żadnej chmury, żadnej mgły – powiedział chłopiec.

Małgosia już wcześniej zwróciła na to uwagę. Zaprzętało ją teraz coś innego.

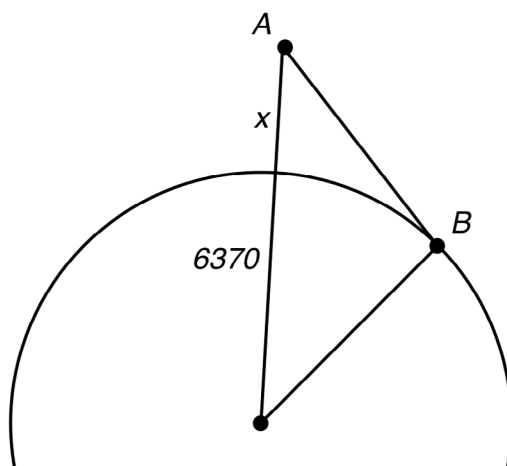
– Kubo – zapytała dziewczyna tajemniczo – czy zastanawiałeś się kiedyś, jak daleko od nas jest teraz ten statek, który właśnie wyłania się zza horyzontu?

– Oczywiście – powiedział chłopiec, jednocześnie sięgając po patyk kotyszący się na przybrzeżnej fali.

Pochylił się i narysował coś na piasku. Małgosia z uwagą przyjrzała się rysunkowi i sięgnęła do kieszeni kurtki.

– Jak to dobrze, że w dzisiejszych czasach zawsze mamy przy sobie kalkulator – powiedziała, uśmiechając się do Kuby”.

Poniżej widzimy rysunek wykonany przez Kubę, a na nim sposób na obliczenie odległości pomiędzy obserwatorem a linią morskiego horyzontu. Oczywiście obserwatora znajdują się na wysokości x nad poziomem morza. Liczba 6370 km to promień Ziemi.



$$AB = \sqrt{(6370 + x)^2 - 6370^2}$$

Ta instrukcja może posłużyć uczniom do prowadzenia swoich obserwacji i pomiarów. Osoby mieszkające nad morzem albo na płaskich równinach o niezalesionych horyzontach także. Czasem szukamy pomysłów na zajęcia dla uczniów podczas szkolnych wycieczek nad morze. To dobre i pouczające zadanie na takie wyprawy.



Znając odpowiedni wzór, wynikający z twierdzenia Pitagorasa, uczniowie mogą układać i rozwiązywać kolejne zadanie. Na przykład takie:

- Jak daleko sięga wzrok człowieka o wzroście 1,8 m, stojącego na brzegu morza, a jak daleko obserwatora o tym samym wzroście, znajdującego się w najwyższym położeniu na nadmorskiej skarpie o wysokości 40 m?
- Jak wysoko musiałby się wznieść obserwator ponad powierzchnię Ziemi, żeby zobaczyć punkt na horyzoncie oddalony od niego o 400 km? Dla uproszczenia rachunków nie uwzględniaj wzrostu obserwatora.

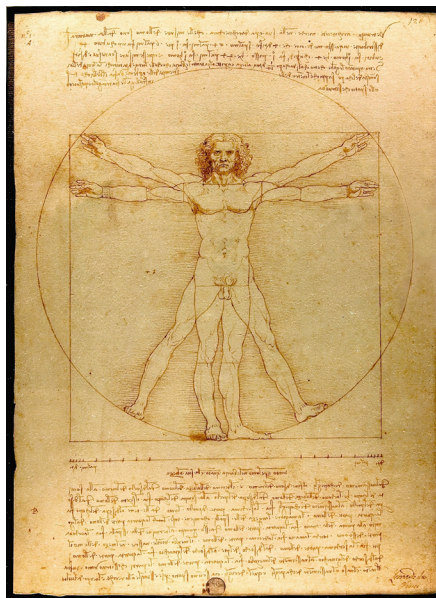
Kontynuacją tego projektu mogłoby być analizowanie wyczynu Felixa Baumgartnera, który w Dniu Nauczyciela w 2012 r. wykonał skok ze spadochronem z wysokości 38 969,4 m. Warto sprawdzić, jak daleko mógł sięgnąć wzrokiem, zanim jeszcze oderwał się od gondoli swego balonu. Jego rekord został pobity dwa lata później, zatem mamy kolejny trop.



Felix Baumgartner patrzy na Ziemię z wysokości prawie 39 kilometrów



Człowiek z rysunku Leonarda da Vinci



Człowiek witruwiański Leonarda da Vinci

Znany rysunek wykonany przez Leonarda da Vinci odwołuje się do starożytnego ideału harmonijnej sylwetki, nad którym pracował rzymianin Witruwiusz w I wieku p.n.e. Możemy się dowiedzieć z niego, że warunkiem idealnych proporcji ciała jest równość dwóch miar: wysokości i szerokości rozłożonych ramion człowieka. Nietrudno domyślić się, czym może się zająć zespół szkolnych badaczy.

W planie projektu znajdują się zadania dotyczące mierzenia dużej liczby osób, sprawdzania, ile spośród nich spełnia wymagania Witruwiusza, a ile nie spełnia. Badanych można podzielić na grupy wiekowe i w każdej sprawdzić, jaki jest średni wynik. Dane te będzie można ze sobą porównać i spróbować znaleźć jakieś tendencje oraz statystyczny ideał piękna, bo może piękno tkwi właśnie w średniej obliczonej dla każdego z parametrów?

Innym tropem mogą być ideały piękna zmieniające się na przestrzeni wieków, nie tylko w kształtach ludzkiego ciała, ale też w sztuce i architekturze. Stąd już tylko krok do pięknych, złotych proporcji greckich świątyń, do złotego podziału odcinka oraz jego licznych zastosowań.

Małe badania społeczne

Podamy tu przykład zastosowania metody projektów do prowadzenia badań istotnych kwestii społecznych. Szkoła jest ciekawą społecznością, która dostarcza wielu danych do opracowania. Dane te można zbierać, opisywać i analizować, a wyniki tych analiz wykorzystywać w prowadzeniu szkolnej polityki na wielu obszarach, przede wszystkim na polu edukacji. Energia i zapał uczniów, którzy będą zbierać dane, nie powinna iść



na marne. Warto zadbać o użyteczność tematów. Niech wyniki badań czemuś służą, np. zwiększeniu się naszej wiedzy na jakiś temat, wykryciu problemu, który warto rozwiązać.

Nasze badania nie będą dotyczyły obszaru wiedzy i umiejętności uczniów (np. w zakresie matematyki), będą raczej skupiały się wokół postaw oraz poglądów członków szkolnej społeczności. Zanim nasi uczniowie zaproponują tematykę badań, można podsunąć im takie propozycje:

1. **Życie towarzyskie uczniów naszej szkoły: w realu czy w wirtualu?**

Wielu ludzi obecnie częściej spotyka się z innymi przez internetowe komunikatory niż bezpośrednio, twarzą w twarz. Jak powszechne jest to zjawisko w naszej klasie i w naszej szkole? Czy nasza klasa odbiega od szkolnej normy? Uczniowie mogą opracować ankietę, którą wypełnią wszyscy uczniowie danej szkoły albo (w przypadku bardzo dużych szkół) wybrana próbka. Ankieta nie powinna składać się ze zbyt wielu pytań i aby ułatwić opracowywanie wyników, większość pytań powinna podsuwać odpowiedzi do wyboru.

Oto przykład takiej ankiety.

Twoje życie towarzyskie

1. Z których ze wskazanych komunikatorów internetowych lub portali korzystasz?

Facebook Twitter Skype Gadu-gadu WhatsApp

2. Z których komunikatorów korzystasz najczęściej? Podaj nazwę dwóch.

3. Co robisz częściej (podkreśl swoją odpowiedź), gdy masz jakiś problem i musisz się poradzić:

Dzwonię do kogoś. Piszę do kogoś (np. SMS-a). Spotykam się z kimś.

4. Zaznacz zdanie, które ciebie dotyczy.

Liczba moich wirtualnych znajomych jest większa niż ludzi, których poznałem/poznałam bezpośrednio.

Częściej komunikuję się ze znajomymi wieczorem i w nocy niż w ciągu dnia.

Lubię, gdy telefon jest zawsze w pobliżu mnie i mogę sprawdzać, co nowego u moich znajomych.

Nie mogę sobie wyobrazić życia bez smartfona, tabletu lub laptopa z aplikacjami do rozmów ze znajomymi.



2. Jakiego przedmiotu w szkole uczyć się najchętniej i dlaczego?

Każdy uczeń potrafi wymienić swoje ulubione przedmioty, ale nie każdy zdaje sobie sprawę z tego, dlaczego właśnie ten przedmiot przypadł mu do gustu bardziej niż inne. Warto też wiedzieć, który przedmiot jest najbardziej popularny i najchętniej przyswajany. Ta wiedza może mieć wpływ na politykę szkoły: z jednej strony warto inwestować w dodatkowe zajęcia, z drugiej zaś sprawdzić, jakie są przyczyny niechęci do innych przedmiotów oraz zrobić coś, by uczniowie chętniej się ich uczyli (np. zorganizować odpowiednią promocję).

Badania ankietowe można przeprowadzić, posługując się następującymi pytaniami:

1. Wymień dwa swoje ulubione przedmioty szkolne.
2. Czy czujesz się bardziej humanistą/humanistką, czy umysłem ścisłym?
3. Dlaczego lubisz swój ulubiony przedmiot? Wskaż swoje odpowiedzi.
 - Bo uczenie się go przychodzi mi łatwo i sprawia przyjemność.
 - Bo jest mi potrzebny do realizacji planów życiowych.
 - Bo nauczyciel tego przedmiotu jest bardzo miły i sympatyczny.
 - Bo nie ma klasówek albo są bardzo łatwe.
 - Bo lekcje są ciekawe i robimy na nich wiele interesujących rzeczy.
 - Bo ...

(W pytaniach tego typu warto wcześniej przeprowadzić badania pilotażowe z pytaniem otwartym, żeby pozbierać możliwe odpowiedzi, gdyż powodów, dla których uczeń lubi przedmiot, może być więcej, niż jesteśmy w stanie wymyślić z uczniami nawet podczas burzy mózgów)

3. Czego obawiasz się w życiu?

To jedno pytanie mogłoby wystarczyć. W badaniach pilotażowych trzeba zebrać wszelkie obawy, żeby później umieścić je w jednym kwestionariuszu. Można także dodać inne. Odpowiedzi warto podzielić na kategorie, np. związane z najbliższymi, z osobą ankietowaną, z teraźniejszością, z przyszłością itp.

4. Jakie książki czytasz najchętniej?

Badania te dałyby odpowiedź na pytanie o poziom czytelnictwa uczniów naszej szkoły. Pytania mogłyby dotyczyć zarówno lektur, jak i książek spoza obowiązkowej listy. Warto także zadać pytanie o typ ulubionego bohatera oraz stosunek do ekranizacji powieści.



5. Jakie seriale oglądasz?

Wybierając temat, warto także uświadomić sobie cel ankiety i wykorzystanie jej wyników. Można np. zaprosić psychologa spoza szkoły, aby zinterpretował te wyniki i wygłosił wykład lub przeprowadził zajęcia z uczniami i nauczycielami. Zanim władze oświatowe zaproponują odgórnie kolejną ankietę, warto przeprowadzić w szkole badania poprzedzające. Tematy takich urzędowych badań są ogólnie dostępne. Metoda projektu w tym wypadku pozwala zlokalizować problem, nazwać go i opisać. Kolejny krok to działania naprawcze, czyli kolejny projekt, którego celem będzie rozwiązanie problemu. Ponieważ problem dotyczy całej społeczności, będzie on mógł być rozwiązywany wspólnie, systemowo, przez wszystkich uczniów i nauczycieli. Wybierając temat badań, warto zacząć od stawiania przypuszczeń na podstawie przeczuć. Badanie wtedy mogłyby pokazać, na ile przeczuć te są uzasadnione i dotyczą znacznej części uczniów

Tematy projektów dość luźno związanych z edukacją matematyczną

W poprzednich tematach projektów ich związki ze szkolnym programem nauczania matematyki były dość wyraźne i nawet jeżeli czasem wykraczaliśmy w nich trochę poza podstawę programową, wiedzieliśmy, w którym miejscu to robimy. Podczas wyszukiwania propozycji tematów dla naszych uczniów warto też brać pod uwagę zagadnienia na pierwszy rzut oka niezwiązane z matematyką. Dopiero, gdy przyjrzymy się im bliżej, dostrzeżemy je, ale nawet jeśli ich nie znajdziemy, zawsze możemy być pewni, że matematyczna metoda jest w nich obecna. Chociażby wtedy, gdy odnajdujemy związki i wzajemne połączenia tworzące regularności i wzory. Wszak stale powtarzamy naszym uczniom: matematykę można spotkać wszędzie.

Superprojekt Muzeum Wyobraźni, czyli podążamy tropami eksponatów

Jego ogólne zasady są następujące:

Uczniowie wyszukują na stronach WWW muzeów albo we własnych domach jeden przedmiot, eksponat, dzieło sztuki, fragment tekstu, coś, co w kulturze lokalnej lub światowej, lub rodzinnej tradycji jest albo było ważne z dowolnego punktu widzenia. Następnie zdobywają informacje na temat wybranego eksponatu i sporządzają o nim krótką notatkę. Będą one klasyfikowane i grupowane w szersze projekty i prezentowane pod jednym tematem. Jeżeli przedmiot nie jest bezpośrednio dostępny, uczeń stara się o jego fotografię.

Wyszukując eksponaty, warto wybierać takie, w których charakterystyce podaje się parametry liczbowe lub do ich analiz używa się matematycznych narzędzi, wzorów związanych z datowaniem, wymiarami, parametrami technicznymi. Można też szukać prostych urządzeń związanych z obliczaniem, rozwiązywaniem problemów (jak suwaki logarytmiczne lub stare komputery).



Duże projekty będą się składały z mniejszych. Uczniowie będą wymieniali się swoimi znaleziskami. Docenią matematykę jako dziedzinę towarzyszącą ludziom od pokoleń. Zauważą, że nasza szeroko rozumiana kultura pielęgnuje wiele uniwersalnych wartości, dla których matematyka jest kanwą, językiem, źródłem lub zasadą porządkującą.

Oto lista tematów i tropów dla małych projektów badawczych. Warto je przedstawić uczniom, ale w projekcie Muzeum Wyobraźni przede wszystkim chodzi o samodzielne wyszukiwanie swoich ulubionych eksponatów.

W opisie niektórych miniprojektów posłużyliśmy się tylko cytatem z Wikipedii, czyli tym, co uczniowie znajdą w pierwszej kolejności, wpisując hasło w wyszukiwarkę. A potem twórczo rozwiną.

Włócznia Świętego Maurycego



Grot Włóczni Świętego Maurycego

Jak podaje Wikipedia:

„Włócznia – średniowieczna broń ceremonialna uważana za pierwsze historyczne insygnium władzy używane przez władców Polski z dynastii Piastów. Włócznia Świętego Maurycego jest kopią Świętej Lancy Cesarskiej, ofiarowaną wraz z częścią gwoźdźcia z Krzyża Pańskiego na zjeździe gnieźnieńskim Bolesławowi I Chrobremu przez Ottona III”. Jej grot przechowywany jest w skarbcu katedralnym w Krakowie.

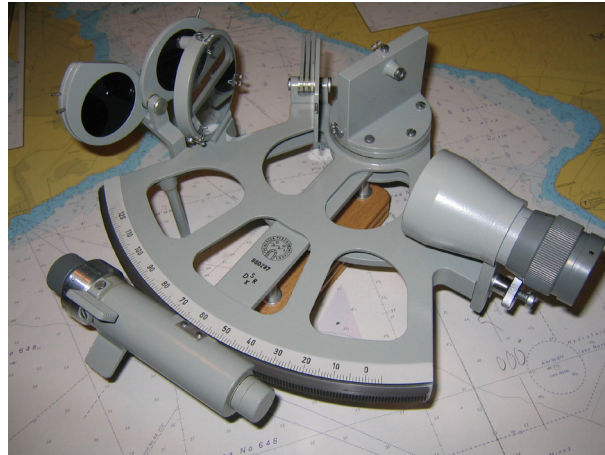
Pierwszy akord piosenki „A Hard Day’s Night” zespołu The Beatles

Informacje z Wikipedii:

„Wielu gitarzystów próbowało odtworzyć charakterystyczny akord z początku utworu. Jednak dopiero matematyk Danny Abriel rozwiązał jego zagadkę używając tak zwanej transformacji Fouriera. Po rozłożeniu akordu na pojedyncze dźwięki okazało się, że kilku z nich nie sposób było zagrać na gitarze. Za kłopotliwe częstotliwości odpowiadał producent George Martin, grający w tym akordzie na pianinie”.



Sekstant



Sekstant

Sekstant to rodzaj kątomierza. Jest to optyczny przyrząd do nawigacji, używany przez żeglarzy i astronomów. Mierzy się nim wysokości gwiazd nad horyzontem oraz kąty poziome i pionowe pomiędzy różnymi obiektami. Warto poznać bliżej ten przyrząd, a może nawet wykonać jego model na podstawie licznych rysunków i animacji dostępnych na stronach WWW.

Już sama nazwa przyrządu zawiera matematyczne pojęcia. Pochodzi bowiem od słowa sexta, oznaczającego szóstą część, w tym wypadku chodzi o szóstą część koła.

Można za jego pomocą określić w nocy szerokość geograficzną, na której się znajdujemy.

Instrukcja obsługi sekstantu powinna się znaleźć w projekcie. Będą tam także wzory matematyczne, które wyjaśniają zasadę działania przyrządu.

Maszyna szyfrująca Enigma i inne sposoby szyfrowania

Historia niemieckiej maszyny szyfrującej Enigma to ważna część historii II wojny światowej. Polscy matematycy: Marian Rejewski, Jerzy Różycki i Henryk Zygalski, pracowali przy rozkodowywaniu niemieckich szyfrogramów jeszcze przed wybuchem wojny. Zasady jej działania są dziś znane i można je odnaleźć w Wikipedii. Zespół zajmujący się projektem może opisać działanie tej maszyny i jej losy oraz wpływ rozszyfrowania działania Enigmy na przebieg wojny. Uczniowie mogą też pójść tropem znaczenia szyfrów w historii świata i poświęcić nieco wysiłku na zaprezentowanie dawnych i współczesnych sposobów kodowania informacji. Kryptografia to dziś wielka gałąź matematyki, pręźnie się rozwijająca.

Prezentacja po zakończeniu projektu może być przeprowadzona w formie konkursu. Uczestnicy będą musieli rozszyfrować słowa. Jeśli sami nie wpadną na sposób odszyfrowania, będą mogli skorzystać z instrukcji.



Uczestnicy projektu mogą zaproponować zagadki w formie prostych anagramów, czyli niby-słów utworzonych z innych wyrazów przez przestawienie liter (prosta – strapo).

Inne szyfrowanie nosi nazwę kryptarytmów i polega na zamianie cyfr w liczbach tworzących działanie arytmetyczne na inne znaki albo litery w taki sposób, aby powstawały słowa.

Zadanie polega na odgadnięciu cyfr, np.

$$\begin{array}{r}
 \\
 + \\
 \hline

 \end{array}$$

$$\text{JAŚ} + \text{ALA} = \text{PARA} \quad \text{PÓŁ} + \text{PÓŁ} = \text{CAŁA} \quad \text{ŁUK} + \text{ŁUK} = \text{KOŁO}$$

Znane są również proste szyfry, w których każdą literę zastępuje się zawsze tym samym znakiem. Łatwo je rozszyfrować, korzystając z częstości występowania liter w tekstach, jeśli rozszyfrowywany tekst jest dostatecznie długi. Niektóre tego typu zagadki można znaleźć nawet w podręcznikach do matematyki. Oto jedna z nich:

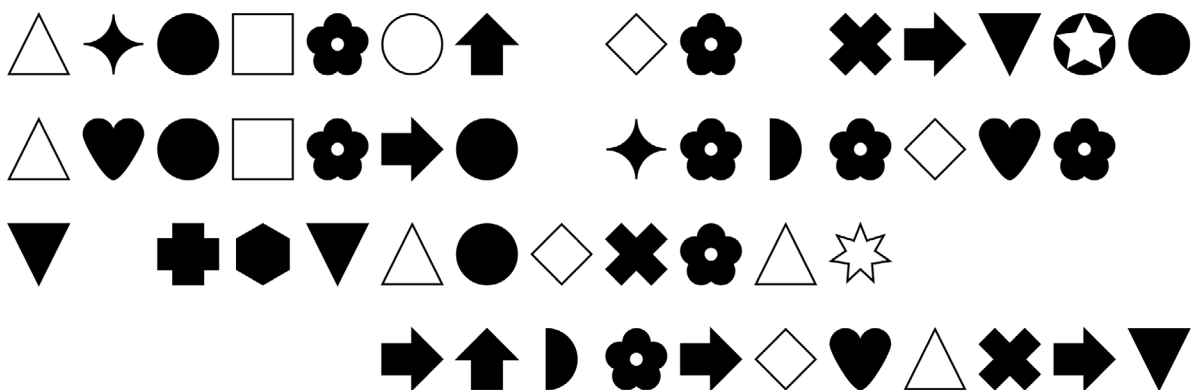
Zagadka

W zaszyfrowanej depeście litery zastąpiono znakami. Każdej literze odpowiada inny znak. Policz procent występowania w tekście poszczególnych znaków i, posługując się szyfrem odczytaj depeście.

Szyfr	
A	16%
C, W, E	10%
N, O	8%



Szyfr	
T, I	6%
Z, K, Y, D	4%
M, J, P, R, H	2%



Najbardziej skomplikowane zagadnienia są najciekawsze. Trudny do wyjaśnienia i zastosowania szyfr RSA to bardzo wartościowe zagadnienie, któremu warto poświęcić trochę czasu w projekcie.

Powszechnie dziś używane kody paskowe i kody QR to także część zagadnień związanych z szyfrowaniem. Dziś już trudno sobie bez nich wyobrazić nowoczesny handel i reklamy.

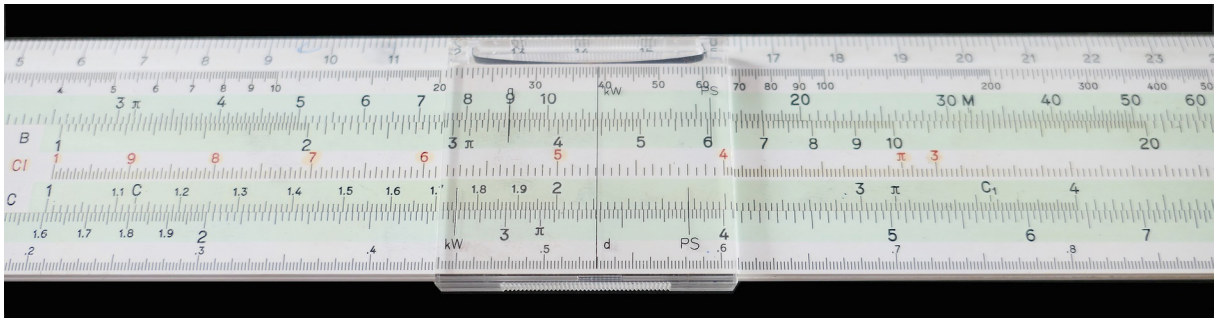


Kody Pesel, NIP, numery kont bankowych także budowane są według określonych zasad. Ich rozpoznanie może być ciekawym tematem pracy projektowej.



Suwak logarytmiczny

Ten temat także dotyczy eksponatu dziś już muzealnego. Zanim młodzież dowie się czegoś o logarytmach oraz o fascynującej historii ich odkrycia, może dowiedzieć się czegoś o przyrządzie, który służył do obliczeń z wykorzystaniem skali logarytmicznej, do dodawania, odejmowania, mnożenia i dzielenia liczb z dużą dokładnością. W wielu domach z pewnością nasi uczniowie znajdą jeszcze stare suwaki. Kiedyś inżynierowie i architekci na całym świecie korzystali z nich w pracy. Może ktoś z domowników jeszcze pamięta, jak się go używało.



Suwak logarytmiczny

Pierwszy taki suwak skonstruowano w roku 1632. Jak to możliwe, że był on popularnym narzędziem do wykonywania rachunków jeszcze w latach 70. XX w.?



To także suwak logarytmiczny, ale w kształcie obracającej się tarczy

Komputer Commodore 64

Ten sprzęt można już znaleźć wyłącznie w muzeach lub na strychach.



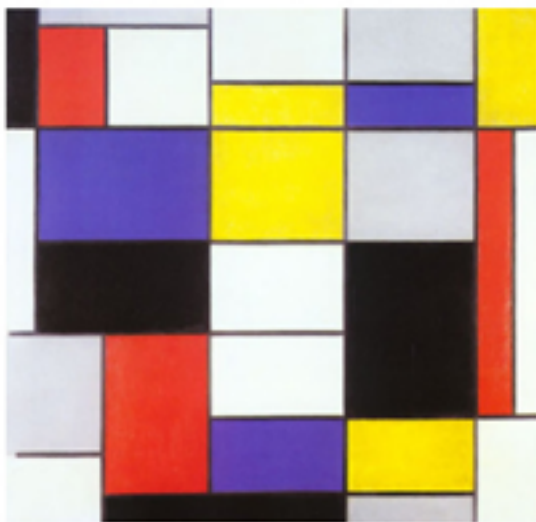
Commodore 64



To komputer Commodore 64. Gdzie jego monitor? Gdzie stacja dysków? Wejście USB? Jak działał ten komputer? Czy był niezawodny? Czy miał łączność z internetem? Te i wiele innych pytań wprowadza uczniów w świat ich dziadków i rodziców, początków obecności komputerów w naszym kraju. Warto wiedzieć coś o poprzednikach dzisiejszych laptopów i tabletów. Jak wyglądał świat bez nich? Jak żyli ludzie? Projekt, którym można się zająć pod pretekstem pierwszego komputera osobistego, może mieć wiele ciekawych rozwinięć: społecznych, obyczajowych, a także historycznych.

Uczniowie mogą prowadzić wywiady z użytkownikami pierwszych komputerów, pytać ich o swoje pierwsze doświadczenia, trudności i zachwyty. Mogą porównywać własne doświadczenia z pracy i zabawy z komputerami oraz pytać o stosunek do nowych technologii ludzi w wieku swoich dziadków i pradiadków. Jeśli nie udało im się nadążyć za technologicznym postępem, to jak się im żyje? Jak młodzi ludzie mogą im pomóc pokonywać technologiczne bariery?

Kolorowe kompozycje Pieta Mondriana i innych malarzy



Piet Mondrian *Kompozycja w czerwieni, żółci, błękitach i czerni*

Piet Mondrian namalował ten obraz (powyżej) w 1921 r. Uważany jest on za dzieło sztuki. W wielu galeriach można spotkać obrazy z wyraźnymi motywami geometrycznymi. Dlaczego uważa się je za dzieła? Co ich autorzy chcieli wyrazić, zestawiając takie kształty? Czy można polubić takie malarstwo? A może da się je naśladować? Jakie są kryteria? Podobne pytania można zadać do obrazu Henri Matisse'a *Ślimak*. Dlaczego ten obraz ma taki tytuł? Czy ma on coś wspólnego ze złotą spiralą?



Abstrakcjonizm, kubizm i inne kierunki w sztuce odwoływały się do geometrii. Co mają wspólnego z tą dziedziną wiedzy? W wielu obrazach spotyka się motywy cyfr i wzorów. Może warto stworzyć w szkole małą galerię reprodukcji prac z matematycznym kontekstem. W słynnej grafice Albrechta Durer'a *Melancholia* dostrzeżemy wielościan i kwadrat magiczny. Uczniowie mogą zbadać te figury i wykonać ich repliki.



Albrecht Durer *Melancholia*

Pojedyncze prace plastyczne warto traktować jako punkty zaczepienia licznych skojarzeń, jako zachętę do aktywności polegającej na dociekaniu różnych ukrytych znaczeń.

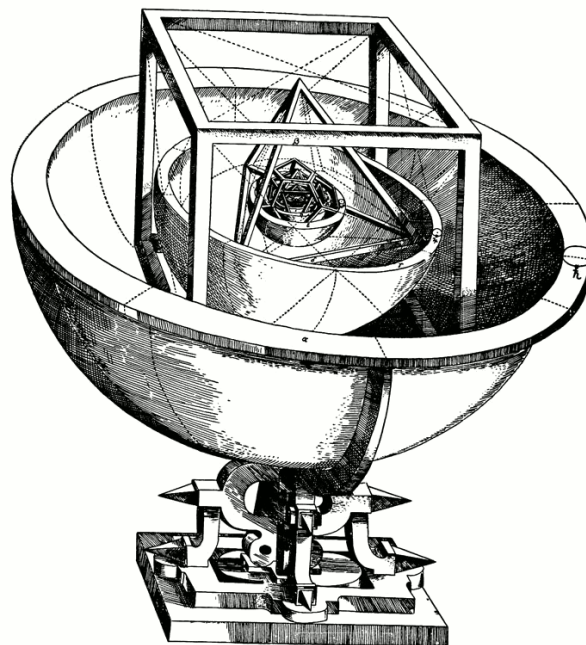


Model wszechświata Johannesa Keplera



Johannes Kepler (1571–1630)

W XVII wieku astronom Johannes Kepler opisał Układ Słoneczny i trajektorie planet za pomocą wielościanów platońskich. Warto poczytać o jego modelu i wykonać podobny. Czy był on zgodny z rzeczywistością? Do jakich wniosków doprowadziły Keplera jego odkrycia?

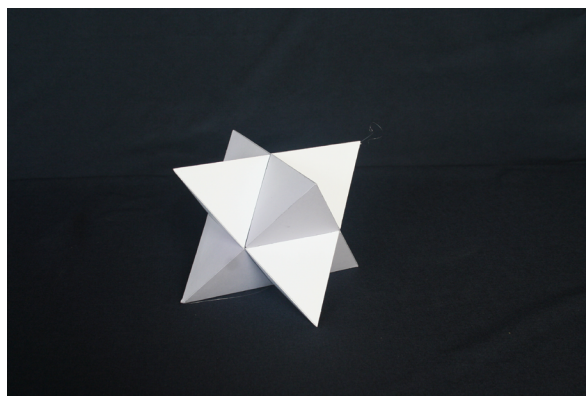


Model Układu Słonecznego Keplera

Poznanie biografii i osiągnięć ludzi, którzy mieli ogromną pasję poznawczą, a przy tym wiele wiedzy i cierpliwości, może być bardzo inspirujące.



Uważa się, że Johannes Kepler odkrył, a na pewno nazwał w 1609 r. wielościan gwiaździsty złożony jakby z dwóch przenikających się czworościanów foremnych (ostrosłupów o ścianach w kształcie przystających trójkątów równobocznych).



Wielościan gwiaździsty

Tę piękną bryłę można wykonać na podstawie siatek albo techniką origami z 12 modułów. W internecie znajdziemy instrukcje i filmy poglądowe. Prezentacja projektu może być połączona z warsztatami, podczas których powstaną modele stelli octanguli. Dodatkową atrakcją mogą być informacje na jej temat.

Przy okazji pojawią się proste zadania dotyczące pola powierzchni i objętości. Jaką figurę otrzymamy, jeżeli zetniemy rogi tej gwiazdki?

Plansza gry mankala w Brooklyn Museum w Nowym Jorku

Nie ma szczególnego powodu, dlaczego akurat ta plansza jest interesująca. Muzea są pełne różnego rodzaju eksponatów podobnie niepozornych. Widząc je, często tylko omiatamy je wzrokiem i nie zatrzymujemy się przy nich nawet na moment. A może jednak warto przystanąć?

Wyszukiwanie i staranne badanie tego typu przedmiotów uczy, że nasza kultura składa się z drobnych elementów. Przyglądanie się im wzbogaca nas, a nasza dociekliwość prowadzi do nowej wiedzy, która otwiera nas na kolejne zadania i wyzwania. Warto brać udział w tej wymianie, z czasem każdy z nas także coś wnosi do kulturowego skarbcza.



Plansza mankali

Nawet taka prosta afrykańska plansza do popularnej gry, która nie jest nawet bardzo stara (ma ok. 150 lat), stanowi cenny wkład w naszą kulturę.

Autorzy projektu nauczą się reguł tej gry, a może znajdą jej współczesną wersję w pobliskim sklepie z grami planszowymi pod zupełnie inną nazwą (kalaha). Na podstawie reguł można stworzyć własną planszę do gry. Są także jej wersje elektroniczne, które także można poznać i przedstawić podczas końcowej prezentacji. Czy do mankali (kalahy) można opracować strategię gwarantującą zwycięstwo dla jednego z graczy?

Dowiedz się więcej

1. [The Millennium Mathematics Project](#) to inicjatywa dotycząca edukacji matematycznej dzieci i młodzieży [online, dostęp dn. 13.10.2017].
2. Przykładowy plan zajęć na temat człowieka witruwiańskiego i złotych proporcji można znaleźć na Math Forum pod adresem mathforum.org/alejandre/frisbie/math/leonardo.html [online, dostęp dn. 13.10.2017].
3. Darmowy serwis [Korthalsaltes](#) z bogatym zestawem modeli figur 3D wraz z siatkami do wykonania brył samodzielnie.



Bibliografia

Kotarba-Kańczugowska M., [Praca metodą projektu](#), (b.r.), [online, dostęp dn. 15.12.2017, pdf. 202 KB].

[Jak pracować metodą projektów?](#), (b.r.), oprac. Pacewicz A., Sterna D., [online, dostęp dn. 15.12.2017]

[Model szkoły ćwiczeń](#), (b.r.), Ośrodek Rozwoju Edukacji [online, dostęp dn. 16.12.2017, pdf. 1MB].

[Rozporządzenie Ministra Edukacji Narodowej z dnia 14 lutego 2017 r. w sprawie podstawy programowej wychowania przedszkolnego oraz podstawy programowej kształcenia ogólnego dla szkoły podstawowej \(...\)](#) (Dz.U. 2017 poz. 356) [online, dostęp dn. 14.12.2017, pdf. 3,74 MB].

Spis ilustracji

Rys. 1. Słynne zagadnienie mostów w Królewcu	13
Rys.2 Jak to możliwe, że z tych samych kawałków układanki można ułożyć trójkąty o różnych polach?	20

